

積分榜

第 30 期 積分榜

30期		積分
109	陳OO	10
212	曹OO	9
302	王OO	8
102	蕭OO	6
106	許OO	6
207	詹OO	5
110	何OO	4
106	廖OO	3
111	謝OO	2
105	余OO	2
110	劉OO	2

陽明論數第 30 期總評

1.想先給眾多投稿同學給予掌聲鼓勵，尤其高一同學投稿人數真的很多呢！未來陽明數學研究的氛圍就靠你們了哈哈。我自己認為數學需要具備的能力之一便是勇氣與一顆嘗試的心，所以能勇於表達自己並勇於投稿，真的是很厲害的一件事！從稿件中能感覺出同學試著用自己的想法與語言寫出這些算式，可以感覺出同學很有數學 **SENSE**，比較可惜的是，以計算題而言，寫得不太嚴謹，很多地方需要有一定的原因才能說明該值為最大或是最小，這個部分同學可以稍作學習，相信未來可以寫得更出色的！

2.本期還是有 3 位同學答得非常好！**109** 陳同學使用微積分，並能在方方面面說明清楚到位，無可挑剔，非常優秀！**212** 曹同學也是使用微積分寫得相當乾淨俐落，惟希望在一次導函數跳到最小值這邊的經過可以多加說明一下，但瑕不掩瑜，寫的也很出色！**302** 王同學使用三角函數作為參數，並能使用倍角公式將 8 次問題降為 4 次，再使用參數降成 2 次，最後使用配方法，想法實在精彩！

102 蕭同學竟然還使用了偏微分來解最小值，可見數學能力廣泛，惟最大值說明不夠嚴謹。其他同學想法都真的只差臨門一腳，或是說明又欠嚴謹，相當可惜，但相信經過這次重新思考，下次可以表現得更好！期待下次同學再次投稿。

3.歡迎投稿同學於任意時間來數學科辦公室 找賴瑞琪老師，探討問題與領取原稿，可將本次思考歷程與最後解答過得的反思製作成學習歷程檔案，未來可用於升學。另外，第 30 期滿分同學將獲得陽明論數徽章，可於任意時間來數學科辦公室 找賴瑞琪老師領取。

陽明論數

第 30 期 20240916

本期問題：

設 x, y 為非負實數，且 $x + y = 1$ ，求 $x^4 + y^4$ 的最大值與最小值？

[方法一]配方法+算幾不等式

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = [1^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = 2x^2y^2 - 4xy + 1$$

$$\text{算幾不等式得知 } \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \therefore \frac{1}{4} \geq xy$$

又因為 x, y 為非負實數，所以 $xy \geq 0$

$$\text{綜合以上，} \frac{1}{4} \geq xy \geq 0$$

$$\text{令 } xy = k, \quad \frac{1}{4} \geq k \geq 0$$

$$\text{所求 } 2x^2y^2 - 4xy + 1 = 2k^2 - 4k + 1 = 2(k-1)^2 - 1$$

二次函數開口向上，頂點為最小值，越遠離頂點，其函數值越大，反之亦然

$$\text{當 } k = \frac{1}{4} \text{ 時，目標最小值為 } \frac{1}{8}$$

$$\text{當 } k = 0 \text{ 時，目標最大值為 } 1$$

[方法二]微積分

$$\text{令 } y = 1 - x, \text{ 令所求為函數 } f(x) = x^4 + (1-x)^4$$

又 x, y 為非負實數，且 $x + y = 1$ ，故 $0 \leq x \leq 1$

$$f'(x) = 4x^3 + 4(1-x)^3(-1) = 4[x^3 - (1-x)^3] = 4[x - (1-x)][x^2 + x(1-x) + (1-x)^2]$$

$$\text{整理得 } f'(x) = 4(2x-1)(x^2 - x + 1)$$

因為 $x^2 - x + 1$ 開口向上且判別式小於 0，故 $x^2 - x + 1$ 恆正

$$f'(x) = 4(2x-1)(x^2 - x + 1) > 0 \text{ 時，} x > \frac{1}{2}, \text{ 即 } y = f(x) \text{ 在 } x > \frac{1}{2} \text{ 時遞增}$$

$$f'(x) = 4(2x-1)(x^2 - x + 1) < 0 \text{ 時，} x < \frac{1}{2}, \text{ 即 } y = f(x) \text{ 在 } x < \frac{1}{2} \text{ 時遞減}$$

$$\text{故 } x = \frac{1}{2} \text{ 時，有 } f(x) \text{ 最小值 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\text{在邊界會有最大值，檢查 } f(0) = 1, f(1) = 1$$

$$\text{故 } x = 0 \vee 1 \text{ 時，都有 } f(x) \text{ 最大值 } 1$$

[方法三]柯西+乘法公式

最小值可由柯西不等式得知：

$$(x^2 + y^2)(1^2 + 1^2) \geq (x + y)^2 \Rightarrow (x^2 + y^2) \geq \frac{1}{2}, \text{ 故 } x^2 + y^2 \text{ 的最小值為 } \frac{1}{2}, \text{ 等號成立時, } x = y$$

$$\left((x^2)^2 + (y^2)^2\right)(1^2 + 1^2) \geq (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow (x^4 + y^4) \geq \frac{1}{8}, \text{ 故 } x^4 + y^4 \text{ 最小值為 } \frac{1}{8}, \text{ 等號成立時, } x = y$$

最大值可由下列不等式得知：

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$\text{因為 } x, y \text{ 為非負實數, 所以 } (x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \geq x^4 + y^4$$

$$\text{故 } 1 \geq x^4 + y^4, \text{ 且當 } x=1, y=0 \text{ 或 } x=0, y=1 \text{ 時, } x^4 + y^4 = 1 \text{ 成立,}$$

$$\text{即 } x^4 + y^4 \text{ 最大值為 } 1$$

[方法四]配方法+乘法公式

$$\text{令 } y = 1 - x,$$

$$\text{所求 } x^4 + (1 - x)^4 = 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x^2 - 2x) + 6x^2 - 4x + 1$$

$$= 2x^2(x^2 - 2x + 1) - 2x^2 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$= 2x^2(x - 1)^2 + 4x^2 - 4x + 1$$

$$= 2x^2(x - 1)^2 + 4x(x - 1) + 1$$

$$\text{令 } k = x(x - 1), \text{ 所求 } 2k^2 + 4k + 1 = 2(k + 1)^2 - 1$$

$$k = x(x - 1) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

二次函數開口向上，頂點為最小值，越遠離頂點，其函數值越大，反之亦然

x, y 為非負實數，且 $x + y = 1$ ，故 $0 \leq x \leq 1$ ，

$$x = \frac{1}{2} \text{ 時, } k \text{ 有最小值 } -\frac{1}{4}; x = 0 \vee 1 \text{ 時, } k \text{ 有最大值 } 0;$$

$$\text{故 } -\frac{1}{4} \leq k \leq 0$$

所求 $2k^2 + 4k + 1 = 2(k + 1)^2 - 1$ 也是開口向上的二次曲線，

$$k = -\frac{1}{4} \text{ 時, 所求有最小值 } \frac{1}{8};$$

$$k = 0 \text{ 時, 所求有最大值 } 1$$

[方法五]機率

x, y 為非負實數，且 $x + y = 1$

可以令有某一個硬幣(可能非公正硬幣)

投擲一次硬幣，出現正面機率為 x ，出現反面機率為 y

每次投擲為獨立事件，現考慮投擲四次

則 $x^4 + y^4$ 表示投擲四次出現四個正面或四個反面的機率

$$x^4 + y^4 = P(\text{四正或四反}) \leq 1$$

又當 $x=1, y=0$ 或 $x=0, y=1$ 時， $x^4 + y^4 = 1$ 成立，故所求最大值為 1

猜想 $x = y = \frac{1}{2}$ 時， $x^4 + y^4$ 會有最小值 $\frac{1}{8}$

證明其他的值都比 $x = y = \frac{1}{2}$ 時還要大

設 $x = \frac{1}{2} + k, y = \frac{1}{2} - k$ ，其中 $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$

$$x^4 + y^4 = \left(\frac{1}{2} + k\right)^4 + \left(\frac{1}{2} - k\right)^4 = \frac{1}{8} + 3k^2 + 2k^4 \geq \frac{1}{8} \quad (\text{若 } k \neq 0, \text{ 值都比 } \frac{1}{8} \text{ 大；若 } k = 0, \text{ 值等同 } \frac{1}{8})$$

得證 $x = y = \frac{1}{2}$ 時， $x^4 + y^4$ 會有最小值 $\frac{1}{8}$

[方法六]三角函數(一)+配方法

x, y 為非負實數，且 $x + y = 1$

$$\text{令 } \begin{cases} x = \cos^2 \theta \\ y = \sin^2 \theta \end{cases}, \text{ 所求 } x^4 + y^4 = \cos^8 \theta + \sin^8 \theta$$

$$(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta \Rightarrow \cos^4 \theta + \sin^4 \theta = 1 - 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)^2 = \cos^8 \theta + \sin^8 \theta - 2\cos^4 \theta \sin^4 \theta$$

$$\Rightarrow \cos^8 \theta + \sin^8 \theta = (1 - 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta)^2 - 2\cos^4 \theta \sin^4 \theta = 2\cos^4 \theta \sin^4 \theta - 4\cos^2 \theta \sin^2 \theta + 1$$

$$\text{令 } a = 4\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \sin^2 2\theta, \text{ 其中 } 0 \leq a = \sin^2 2\theta \leq 1$$

$$\Rightarrow \cos^8 \theta + \sin^8 \theta = 2\cos^4 \theta \sin^4 \theta - 4\cos^2 \theta \sin^2 \theta + 1 = \frac{1}{8}a^2 - a + 1 = \frac{1}{8}(a - 4)^2 - 1$$

二次函數開口向上，頂點為最小值，越遠離頂點，其函數值越大，反之亦然

$0 \leq a \leq 1$ ，故 $a=1$ 時，所求最小值為 $\frac{1}{8}$ ； $a=0$ 時，所求最小值為 1

[方法七]三角函數(二)+配方法

x, y 為非負實數，且 $x + y = 1$

$$\text{令 } \begin{cases} x = \cos^2 \theta \\ y = \sin^2 \theta \end{cases}, \text{ 所求 } x^4 + y^4 = \cos^8 \theta + \sin^8 \theta = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^4 + \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^4$$

$$x^4 + y^4 = \frac{\cos^4 2\theta + 6\cos^2 2\theta + 1}{8} = \frac{t^2 + 6t + 1}{8} \quad (\text{令 } t = \cos^2 2\theta, \quad 0 \leq t = \cos^2 2\theta \leq 1)$$

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{8}(t+3)^2 - 1$$

二次函數開口向上，頂點為最小值，越遠離頂點，其函數值越大，反之亦然

$0 \leq t \leq 1$ ，故 $t=0$ 時，所求最小值為 $\frac{1}{8}$ ； $t=1$ 時，所求最小值為 1

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期：2024/9/16
班級： 座號： 姓名：

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

設 x, y 為非負實數，且 $x+y=1$ ，求 x^4+y^4 的最大值與最小值

$$x+y=1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$x+y=1 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow x^4+y^4 = x^4+(1-x)^4$$

$$x^4+(1-x)^4 = x^4+x^4-4x^3+6x^2-4x+1 = 2x^4-4x^3+6x^2-4x+1$$

$$\text{設函數 } f(x) = 2x^4-4x^3+6x^2-4x+1 \quad f'(x) = 8x^3-12x^2+12x-4$$

對一函數進行一階導後若某點等於 0，則此點為此函數之極值或極點。若此函數無極點，且開口向上，則此點為此函數之最小值。若此函數無極點，且開口向下，則此點為此函數之最大值。

$$f''(x) = 24x^2-24x+12$$

$$= 12(2x^2-2x+1)$$

$$f''(x) = 12(2x^2-2x+1)$$

$$\text{透過配方法可得 } 24(x-\frac{1}{2})^2+12 = 12(2x^2-2x+1) = f''(x)$$

$\Rightarrow f''(x)$ 的頂點為 $(0.5, 6)$ ，且開口向上

$\Rightarrow f''(x) > 0$ 且 $f''(x)$ 開口向上，且 $f''(x)$ 無極點

$\Rightarrow f''(x)$ 為零的某點為零時，此點為此函數之極值

$$8x^3-12x^2+12x-4 = 0$$

因式分解得到

$$8x^3-12x^2+12x-4 = 4(x-\frac{1}{2})(2x^2-x+1) = 0$$

$$x^2-x+1 \xrightarrow{\text{試解}} \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad (\text{捨此解為虛數})$$

$$(x-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

當 x 為 $\frac{1}{2}$ 時

將 $x = \frac{1}{2}$ 代入

$$\Rightarrow (\frac{1}{2})^4 + (1-\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{8}$$

綜上所述， x^4+y^4 的最大值為 1

最小值為 $\frac{1}{8}$

能使用微積分，並在每個細節撰寫清楚完整，相當優秀！

① 能檢查 x 的範圍取值 ② 在一階導函數與二階導函數上的說明相當仔細周全！
在高一便能自主學習微積分，並對微積分的計算上有充足的觀念認識，實為難得！還請繼續保持這份學習的心！

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期：20240916
班級： 座號： 姓名：

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$y = 1 - x \text{ 代入}$$

$$f(x) = x^4 + (1 - x)^4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4(1 - x)^3$$

$$= 4x^3 - 4(1 - 3x + 3x^2 - x^3)$$

$$= 4x^3 + 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 12x - 4$$

$$= 4(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$= 4(x - \frac{1}{2})(2x^2 - 2x + 2)$$

↓ 這裡建議再多說明一莫呢！

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ 有極小} \Rightarrow (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{8} \neq$$

$$\text{邊界 max: } x = 0 \quad y = 1 \text{ 代入}$$

$$0^4 + 1^4 = 1 \neq$$

整體相當乾淨俐落、簡明扼要，是非常出色的寫法呢！

唯過程說明建議可以再清楚周全。

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期: 9/16/2024
 班級: 座號: 姓名:

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$x + y = 1$, 又 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\theta \in [0, \pi]$ 將 x, y 三角換元, 不妨
 $\begin{cases} x = \sin^2 \theta \\ y = \cos^2 \theta \end{cases}$ 則 $x^4 + y^4 = (\sin^2 \theta)^4 + (\cos^2 \theta)^4$

$$= \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^4 + \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^4$$

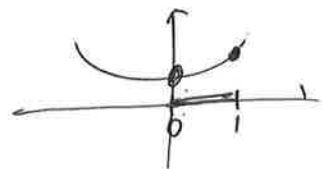
$$= \frac{(1 - \cos 2\theta)^4 + (1 + \cos 2\theta)^4}{2^4}$$

$$= \frac{8 \cos^4 2\theta + 12 \cos^2 2\theta + 2}{16}$$

$$x^4 + y^4 = \frac{4 \cos^4 2\theta + 6 \cos^2 2\theta + 1}{8}$$

將 $\cos 2\theta$ 換元為 t ($t \in [0, 1]$)

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{8} (4t^4 + 6t^2 + 1)$$



$t \geq 0$, 開口向上, $t=0$ 時取到最小值, $t=1$ 時取到最大值。

即 $\cos^2 2\theta = 0$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ or $\frac{3\pi}{4}$
 此時 $\cos 2\theta = 0$

$\cos^2 2\theta = 1$ $\theta = 0$ or 90°
 $\cos 2\theta = \pm 1$

$$\begin{cases} x = \sin^2 \theta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \\ y = \cos^2 \theta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

或 (對稱) $\begin{cases} x = \sin^2 \theta = 0 \\ y = \cos^2 \theta = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

所以 $x^4 + y^4$ 最小值為 $\left(\frac{1}{2} \right)^4 \times 2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$x^4 + y^4$ 最大值為 $1^4 + 0 = 1$

8

能使用三角函數簡化問題, 想法出眾!

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期: 9/16/2024
班級: 座號: 姓名:

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $x+y=1$ 代入 x^4+y^4 不等式

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{1}{4} \geq xy$$

取等號在 $x=y$ 時, 此時 $x=y=\frac{1}{2}$ → 此時為 xy 最大值為 $\frac{1}{4}$ 時, 不代表為

所以 $x^4+y^4 = \frac{1}{8}$ 是 x^4+y^4 的最小值。又 x, y 的取值為 $[0, 1]$, ↓ ? why 此時 x^4+y^4 最小值

最大值在極端時出現 $(1, 0)$ 或 $(0, 1)$, 此時 必須再多做說明

有 $1^4+0^4=1$ why? 所以 $x^4+y^4=1$ 是 x^4+y^4 的最大值。

極端值不一定最大值, 很多做說明!

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期：2024/09/16
班級： 座號： 姓名：

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

設 x, y 為非負實數，且 $x+y=1$ ，求 x^4+y^4 的最大值，最小值

min:

$$\text{令 } f(a,b) = x^4 + y^4, \quad g(a,b) = x + y - 1$$

$$F(a,b,\lambda) = f(a,b) + \lambda g(a,b).$$

$$\Rightarrow F(a,b,\lambda) = x^4 + y^4 + \lambda(x + y - 1).$$

$$\begin{cases} F'_x = 4x^3 + \lambda = 0. & \text{--- ①} \\ F'_y = 4y^3 + \lambda = 0. & \text{--- ②} \\ F'_\lambda = x + y - 1 = 0 & \text{--- ③} \end{cases}$$

由 ① ② 可知 $x = y$

$$\Rightarrow 2x = 1, \quad x = y = \frac{1}{2} \text{ 代入原式}$$

$$\begin{aligned} (x^4 + y^4)_{\min} &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{8} \# \end{aligned}$$

能使用偏微解，相當少見，寫得也很清楚，
表現優良！ Good!

Max:

$$\text{設 } (x^4 + y^4)_{\max} = 1$$

$$\because x + y = 1 \quad \therefore 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

$$\text{則 } (x^4 + y^4)_{\max} \leq 1.$$

若 $0 < a < 1$ ， a 為底數， b 為指數

則 b 越大 a^b 越小

$$\text{故 } (x^4 + y^4)_{\max} = 1 \#$$

說明方式不太嚴謹！

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期: 2024.9.16 (一)
班級: [REDACTED] 座號: [REDACTED] 姓名: [REDACTED]

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \text{算幾不等式}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{xy})^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \geq xy$$

此時 (x, y)

$x = y = \frac{1}{2}$ 此時表示 xy 最大值時, $x = y = \frac{1}{2}$

$x^4 + y^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$ 不代表 $x^4 + y^4$ 的最小值是在 $x = y = \frac{1}{2}$ 時
目前並沒有合理過程表示 $x^4 + y^4$ 的最小值是在 $x = y = \frac{1}{2}$ 時
需要說明呢!

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (1-y)^4 + y^4 = (1-y)^2(1-y)^2 + y^4 \\ &= (1-2y+y^2)^2 + y^4 = 2y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 \\ &= 2y(y^3 - 2y^2 + 3y - 2) + 1 \\ &= 2y[(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + (y^2 - 1)] + 1 \\ &= 2y[(y-1)^3 + (y^2 - 1)] + 1 \end{aligned}$$

$$0 \leq y \leq 1, 2y[(y-1)^3 + (y^2 - 1)] \leq 0$$

$$\Rightarrow 2y[(y-1)^3 + (y^2 - 1)] + 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 \leq 1$$

最大值 = 1

$$\frac{1}{8} \leq x^4 + y^4 \leq 1 \quad \#$$

這個部份的說明就很清楚呢!
Good!

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期: 20240916
 班級: 座號: 姓名:

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

設 x, y 為非負實數且 $x+y=1$, 求 x^4+y^4 的最大值與最小值

由算幾不等式可知

$$x^4+y^4 \geq 2x^2y^2 \quad \checkmark$$

最小值為

$$x^4+y^4 = 2x^2y^2 \quad \times$$

$$x^4-2x^2y^2+y^4=0$$

$$(x^2-y^2)^2=0$$

$$x^2=y^2$$

$$x^2=(1-x)^2 \quad \downarrow \times$$

$$x^2=x^2-2x+1$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$x^4+y^4$$

$$=(\frac{1}{2})^4+(1-\frac{1}{2})^4$$

$$=\frac{1}{16} \times 2$$

$$=\frac{1}{8}$$

$$\text{設 } x^4+y^4 > 1$$

$$x^4+(x-1)^4 > 1$$

$$x^4+x^4-4x^3+6x^2-4x+1 > 1$$

$$x^4+3x^2 > 2x^3+2x$$

$$x^3+3x > 2x^2+2$$

$$x > 1$$

不合

$$\text{故 } x^4+y^4 \leq 1$$

$$\text{若 } x^4+y^4 = 1$$

$$x=1, y=1$$

最大值為 1

4

答: 最大值為 1, 最小值為 $\frac{1}{8}$

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期: 2024/09/16
班級: 座號: 姓名:

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$x+y=1$$

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$x^4+y^4 = (x+y)^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3$$

$$= (x+y)^4 - 2(2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3)$$

$$= (x+y)^4 - 4xy(x^2+y^2) - 2xy(3xy)$$

$$= (x+y)^4 - 4xy[(x+y)^2 - 2xy] - 2xy(3xy)$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$0 \leq xy \leq \frac{1}{4}$$

最小值: $1^4 - 1(1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{3}{4})$

why?

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}$$

請多做說明

$$= \frac{1}{8}$$

最大值:

$$1^2 - 0 - 0$$

why?

$$= 1$$

A. 最大值: 1
最小值: $\frac{1}{8}$

4

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期: 20240916
班級: 座號: 姓名:

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$x+y=1$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{xy} \quad x^2+y^2 = 1^2 - 2xy = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \geq xy$$

$$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \Rightarrow \frac{1}{4} - 2xy \cdot xy = \frac{1}{8}$$

請說明 xy 最大值 本題
為何是 $x+y$ 最大值?

$$(x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x+y)^2 - 2xy]^2 - 2xy \cdot xy$$
$$= (1-2xy)^2 - 2x^2y^2 - \text{①}$$

x, y 為非負實數 $\Rightarrow xy$ 為非負實數

$\Rightarrow$ 由此可證當 xy 愈小時 ① 的結果愈大
理由尚且不足

$\Rightarrow xy$ 的最小值為 0

$\Rightarrow x=0, y=1$ - ② 或 $x=1, y=0$ - ③

將 ② 代入 ①

$$(1-0)^2 - 0$$
$$= 1$$

將 ③ 代入 ①

$$(1-0)^2 - 0$$
$$= 1$$

A: 最大值 1 ; 最小值 $\frac{1}{8}$

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期：2024/9/16
班級： 座號： 姓名：

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

因 x, y 非負， $x+y=1$ 求 x^4+y^4 最大值、最小值

$$\hookrightarrow x=y-1 \quad \begin{array}{l} x \text{ 值介於 } 0 \sim 1 \\ y \text{ 值介於 } 0 \sim 1 \end{array}$$

在 $0 \sim 1$ 小數之間平方四次之後變小

求最小值 x, y 必須為 $0 \sim 1$ 之間之小數

x, y 必須是最接近的 why? 須說明清楚!
 $x=y=0.5$

$$x^4+y^4=0.125$$

求最大值 x, y 之間 必須要一個最大一個最小 why? 須說明清楚!
因為 $x, y \geq 0$

$$x=1, y=0$$

$$y=1, x=0$$

$$x^4+y^4=1$$

$$\text{最大值} = 1$$

$$\text{最小值} = 0.125$$

2

陽明論數 答案紙

第 30 期 本期發布日期：20240916
班級： 座號： 姓名：

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1：請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2：請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

設 x, y 為非負實數，且 $x+y=1$ ，求 x^4+y^4 的最大值與最小值？

條件 $x+y=1, x, y \geq 0$

可知 $y=1-x$ ，將 y 代入公式： $x^4+y^4=x^4+(1-x)^4$

展開 $(1-x)^4=1-4x+6x^2-4x^3+x^4$ 代入上式

得 $x^4+(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)=2x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

$\because x, y \geq 0$ 且 $x+y=1 \therefore x$ 的範圍是 $0 \leq x \leq 1$

需找到 x^4+y^4 的最大值和最小值

需涵蓋邊界情況和一個中間值 $\Rightarrow$ 函數圖形不一定恆遞增、恆遞減

1. 當 $x=0$ 時， $y=1$ ： $x^4+y^4=0^4+1^4=0+1=1$ 所以不一定在邊界

2. 當 $x=1$ 時， $y=0$ ： $x^4+y^4=1^4+0^4=1+0=1$ 也不一定在中間值

3. 當 $x=\frac{1}{2}$ 時， $y=\frac{1}{2}$ ： $x^4+y^4=(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{8}$ 此種說法不太正確

$x=0$ 或 $x=1$ 時， $x^4+y^4=1$

$x=\frac{1}{2}$ 時， $x^4+y^4=\frac{1}{8}$

得 x^4+y^4 的最大值是 1，最小值是 $\frac{1}{8}$

若刚好在邊界或是中間值
也是有合理原因推導而出

2

陽明論數 答案紙

第 一 期 本期發布日期: 2024/9/16
班級: 座號: 姓名:

主辦單位: 桃園市立陽明高中數學科

注意事項 1: 請使用黑色或藍色原子筆作答

注意事項 2: 請將答案投入數學科辦公室內陽明論數投稿箱中。

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$\rightarrow x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 \rightarrow (x+y)^4 - 2xy(2x^2 + 3xy + 2y^2)$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \cdot \frac{1}{2} \geq \sqrt{xy} \cdot \frac{1}{4} \geq xy \quad \because x, y \text{ 為非負實數} \therefore xy \geq 0$$

$$\hookrightarrow "=" \text{ 成立於 } x=y \text{ 時} \therefore x = \frac{1}{2} = y$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{最大值: } 1^4 - 2 \times \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{8}} \\ \text{最小值: } 1^4 - 0(2x^2 + 3xy + 2y^2) = \boxed{1} \end{array} \right.$$

此等式成立是 xy 最大值為 1/4 時
不什麼是 x+y 最小值的時候, 須
做證明!

並無明確原因
表達, 須再多說明!

2