

積分榜

第 36 期 積分榜

36期		積分
301	吳OO	8
301	鄒OO	5

積分榜前十名

積分榜	30-36期	總積分
301	吳OO	58
301	鄒OO	45
207	詹OO	23
102	蕭OO	16
110	何OO	14
109	陳OO	12
102	梁OO	10
310	陳OO	10
302	王OO	10
212	曹OO	9

陽明論數第 36 期總評

- 1.本期為排列組合的題目，細節偏多，需要謹慎細心，201 鄒同學與吳同學都寫得不錯，鄒同學式子有一些未能說明清楚，吳同學有些微計算錯誤，稍微可惜。
- 2.本期本學期陽明論數最後一期，感謝大家的參與。恭喜積分榜上前十名的同學，我們將會頒發獎狀喔，再次感謝大家踴躍參與。
- 3.歡迎投稿同學於任意時間來數學科辦公室 找賴瑞琪老師，探討問題與領取原稿，也可將本次思考歷程與最後解答過程的反思製作成學習歷程檔案，未來可用於升學。

陽明論數

第 36 期 20241216

主辦單位：桃園市立陽明高中數學科
2024.12.16(一) 公佈，2024.12.27(五)中午 12 點 30 分截止

本期問題：

小明正在設計一個五位數字的密碼，密碼由數字 0、1、2、3、4 組成，可重複選取。為了增加安全性，他希望密碼能滿足下列條件：對於每個數字 k ，密碼中至少有 k 個數字小於 k 。

請問，小明可以設計出多少種不同的密碼？請列出計算過程並給出答案

[解]：根據題目定義，任何滿足條件的數字串（即符合題目條件的數字串）的排列都符合題目要求。以下列表展示了按重複數字模式分類的數字串，並將數字排列為非遞減順序。例如，模式 (3,1,1)(3, 1, 1)(3,1,1) 表示一個數字出現 3 次，另外兩個數字各出現 1 次。

- 模式 (5)：00000 [1 種數字串]
- 模式 (4, 1)：00001, 00002, 00003, 00004, 01111 [5 種數字串]
- 模式 (3, 2)：00011, 00022, 00033, 00111, 00222 [5 種數字串]
- 模式 (3, 1, 1)：00012, 00013, 00014, 00023, 00024, 00034, 01112, 01113, 01114, 01222 [10 種數字串]
- 模式 (2, 2, 1)：00112, 00113, 00114, 00122, 00133, 00223, 00224, 00233, 01122, 01133 [10 種數字串]
- 模式 (2, 1, 1, 1)：00123, 00124, 00134, 00234, 01123, 01124, 01134, 01223, 01224, 01233 [10 種數字串]
- 模式 (1, 1, 1, 1, 1)：01234 [1 種數字串]

每個列表中數字不同排列的數量可以使用組合數計算：

- 模式 (5) : $C_5^5 = \frac{5!}{5!} = 1$
- 模式 (4, 1) : $C_4^5 = \frac{5!}{4!1!} = 5$
- 模式 (3, 2) : $C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$
- 模式 (3, 1, 1) : $\frac{5!}{3!1!1!} = 20$
- 模式 (2, 2, 1) : $\frac{5!}{2!2!1!} = 30$
- 模式 (2, 1, 1, 1) : $\frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$
- 模式 (1, 1, 1, 1, 1) : $\frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 120$

最後，滿足條件的字串數量通過將每種模式的出現次數與其不同排列數量相乘得出： $1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 30 + 10 \cdot 60 + 1 \cdot 120 = 1296$

通用情況（替換 5 為 b 的值）

將問題視為尋找符合條件的 b 進制非負整數（允許前導零）的數量。條件是：對於每個 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ，至少有 j 個數字小於 j。

暫時將數字擴展為 b+1 進制，並考慮所有 $(b+1)^b$ 個 b 位數。

這些數字可以分成 $\frac{(b+1)^b}{b+1}$ 個大小為 b+1 的組，每組形式為：

$$\{a_1 \dots a_b, a_1 + 1 \dots a_b + 1, a_1 + b \dots a_b + b\}$$

其中加法按模 b+1 計算。每組中恰好有一個數滿足條件，因而總數為：

$$\frac{(b+1)^b}{b+1} = (b+1)^{b-1}$$

當 b = 5 時，結果為： $6^4 = 1296$